ALGEBRE - GEOMETRIE

Les parties 1 et 2 sont indépendantes

1ère Partie

I Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur un corps $\mathbb{K}$ commutatif. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On note P_u le polynôme caractéristique de u, $E_\lambda(u)$ l'espace propre de u associé à la valeur propre λ et pour F un sous espace vectoriel de E, $u<F>$ l'image de F par u.

1) Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

a) u est diagonalisable

b) P_u est scindé sur $\mathbb{K}$ et pour tout F, sous espace vectoriel de E, tel que $u<F> \subset F$, $\exists$ G sous espace vectoriel de E tel que $F \oplus G = E$ et $u<G> \subset G$.

2) Montrer que si u est diagonalisable et si u laisse stable un sous espace vectoriel F de E alors $u_{|F}$ (la restriction de u à F) est diagonalisable.

3) Soient f et g, éléments de $\mathcal{L}(E)$, tels que $f \circ g = g \circ f$.

a) Montrer que $g<E_\lambda(f)> \subset E_\lambda(f)$

b) En déduire que si f et g sont diagonalisables, il existe une base de E de vecteurs propres commune à f et g.

II On note $M_{l,c}(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices l lignes c colonnes à coefficients dans $\mathbb{C}$, le corps des complexes, et $M_r(\mathbb{C})$ l'algèbre des matrices carrées (r x r) à coefficients dans $\mathbb{C}$. On note $\cdot$ le produit usuel des matrices. Soient $A \in M_n(\mathbb{C})$ et $B \in M_p(\mathbb{C})$.

On définit la (np x np) matrice carrée $A \otimes B$ par :

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & a_{ij}B & \vdots \\ a_{n1}B & \cdots & a_{nn}B \end{bmatrix}$$

(où $a_{ij}B$ désigne le produit de la matrice B par le scalaire a_{ij})

1) Soit $f_{A,B} : M_{n,p}(\mathbb{C}) \longrightarrow M_{n,p}(\mathbb{C})$
$M \longrightarrow A \cdot M \cdot {}^tB$

Montrer que $A \otimes B$ est la matrice de $f_{A,B}$ dans une base que l'on précisera (^tB désigne la transposée de la matrice B).

2) a) Montrer que $A \otimes B = 0 \iff A = 0$ ou $B = 0$.

b) Soit A' une autre matrice de $M_n(\mathbb{C})$ et B' une autre matrice de $M_p(\mathbb{C})$.
Montrer que $(A \otimes B) \cdot (A' \otimes B') = (A \cdot A') \otimes (B \cdot B')$

c) Dans le cas où A et B sont inversibles, déterminer $(A \otimes B)^{-1}$.

3) En déduire le déterminant de $A \otimes B$.

4) On considère à présent que A et B sont deux matrices (2x2) diagonalisables. On se propose de démontrer que $(A \otimes B)$ est diagonalisable.

a) On pose $\tilde{A} = A \otimes I_2$ (I_2 désignant la matrice identité de $M_2(\mathbb{C})$). Déterminer les vecteurs propres de $\tilde{A}$.

b) On pose $\tilde{B} = I_2 \otimes B$. Quels sont les vecteurs propres de $\tilde{B}$?

c) Montrer que $\tilde{A}$ et $\tilde{B}$ commutent.

d) En déduire le résultat annoncé.

5) Dans le cas où A et B sont deux matrices (nxn) diagonalisables, déterminer les valeurs propres, les vecteurs propres et le polynôme caractéristique de $A \otimes B$ (on notera λ_i les valeurs propres de A, μ_j les valeurs propres de B).

2ème PARTIE

I Soit $z \in \mathbb{C}$. On dit que z est un nombre algébrique s'il existe un polynôme non nul P de $\mathbb{Q}[x]$ tel que $P(z) = 0$. On note A l'ensemble des nombres algébriques.

1) Montrer, en justifiant toute affirmation, que :

a) $(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}) \cap A \neq \phi$

b) $(\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}) \cap A \neq \phi$

(le signe "\" signifiant "privé de")

2) Montrer que $\forall a \in A, \exists ! \Pi_a \in \mathbb{Q}[x]$ unitaire irréductible de degré minimal tel que $\Pi_a(a) = 0$ (on pourra étudier la structure algébrique de $I_a = \{ P \in \mathbb{Q}[x], P(a) = 0\}$).

3) Pour a élément de A, on appelle degré de a sur $\mathbb{Q}$ le degré de Π_a. Montrer que $\sqrt[3]{2}$ est de degré 3 sur $\mathbb{Q}$.

4) On se propose de déterminer explicitement un polynôme de $\mathbb{Q}[x]$ annulant $\sqrt{2} + \sqrt{3}$.

a) soit $P(t) = t^2 + at + b$ et $Q(t) = t^2 + ct + d$ deux polynômes à coefficients dans $\mathbb{Q}$. Calculer le déterminant :

$$D(P(t), Q(t)) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ a & 1 & c & 1 \\ b & a & d & c \\ 0 & b & 0 & d \end{vmatrix}$$

b) Exprimer le polynôme de $\mathbb{Q}[x]$, $R(x) = D(P(x-t), Q(t))$. En choisissant $P = \Pi_{\sqrt{2}}$ et $Q = \Pi_{\sqrt{3}}$, calculer R et vérifiez que $R\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right) = 0$.

5) Soit $a \neq 0$ élément de A. Montrer que $\frac{1}{a} \in A$.

6) On considère $\mathbb{C}$ comme un espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$. Montrer que (z algébrique) <=> (la famille des $(z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est liée).

7) Soit $a \in A$. On appelle $\mathbb{Q}[a] = \{ P(a),\ P \in \mathbb{Q}[x] \}$

a) Montrer que $\mathbb{Q}[a]$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$.

b) Déterminer la dimension de $\mathbb{Q}[a]$ en tant que $\mathbb{Q}$ espace vectoriel, notée $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}[a]$ (on pourra introduire Π_a le polynôme irréductible unitaire de $\mathbb{Q}[x]$ de degré minimal annulant a).

c) Montrer que $\mathbb{Q}[a]$ est un corps.

d) Soit $b \in A$. On note
$$\mathbb{Q}[a, b] = \{ P(b),\ P \in (\mathbb{Q}[a])[x] \}$$
Montrer que $\mathbb{Q}[a, b]$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{Q}[a]$ de dimension finie.

e) Montrer que :
$$\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}[a, b] = \dim_{\mathbb{Q}[a]} \mathbb{Q}[a, b] . \dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}[a].$$

f) En déduire que A est un corps.

II Un nombre $z \in \mathbb{C}\backslash A$ est dit transcendant.

1) Soit $P \in \mathbb{Z}[x]$, $P = \sum_{k=0}^{m} a_k x^k$ $(a_m \neq 0)$. On appelle hauteur du polynôme P, la somme $h(P) = m + \sum_{k=0}^{m} |a_k|$.

Montrer qu'il existe un nombre fini de polynômes P de $\mathbb{Z}[x]$ vérifiant $h(P) = n$ avec $n \in \mathbb{N}$ fixé.

2) On rappelle q'un ensemble dénombrable est un ensemble équipotent à $\mathbb{N}$ et que $\mathbb{C}$ n'est pas dénombrable.

a) Montrer que A est dénombrable (on pourra utiliser sans démonstration la propriété suivante : une réunion dénombrable d'ensembles finis est dénombrable).

b) En déduire qu'il existe une infinité de nombres transcendants.

3) On se propose de construire une famille de nombres transcendants. Soit $a \in A \cap \mathbb{R}$ de degré n sur $\mathbb{Q}$ $(n \geq 2)$. On note f_a un polynôme de $\mathbb{Z}[x]$ associé à Π_a (f_a est donc de degré n et $f_a(a) = 0$).

a) Montrer que $a \notin \mathbb{Q}$.

b) Soit M tel que $|f_a'(x)| < M$ pour $x \in]a-1, a+1[$ (f_a' désignant la dérivée de f_a).

Soit $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \cap]a-1, a+1[$ tel que $f_a(r) \neq 0$ et f_a non nulle sur l'intervalle centré en a et de rayon $|a-r|$. Montrer que $\exists\, C > 0$ tel que $|r-a| > \frac{C}{q^n}$.

c) Soit $u_n = \frac{1}{10^{n!}}$. Montrer que la série de terme général u_n converge et soit $l = \sum_{k=1}^{\infty} u_k$.

Montrer que l est transcendant.

d) En déduire une famille de nombres transcendants.